УДК 517.956
DOI: 10.21209/2658-7114-2020-15-3-46-51

Святослав Евгеньевич Холодовский[1]**,**
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),
e-mail: hol47@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-3983-1384

Ирина Анатольевна Ефимова[2]**,**
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский институт предпринимательства
(672086, Россия, г. Чита, ул. Ленинградская, 16),
e-mail: yefimova79@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-7661-0233

Задача Дирихле в полосе для дивергентных уравнений с монотонными разрывными коэффициентами. Случаи решений в конечном виде

Рассмотрена первая краевая задача в полосе $-l < x < l$, $y \in R$, состоящей из двух неоднородных зон $D_1(-l < x < 0)$ и $D_2(0 < x < l)$, в которых дивергентное уравнение имеет коэффициенты соответственно вида $K_1(x) = k_1(b_1x + 1)^2$ и $K_2(x) = k_2(b_2x + 1)^2$, где постоянные k_i, b_i удовлетворяют условию $k_1b_1 = k_2b_2$. Решение задачи выражено в конечном виде через решение классической задачи Дирихле в полосе для уравнения Лапласа.

Ключевые слова: краевые задачи в полосе, дивергентное уравнение, кусочно-непрерывные функции проницаемости, условия сопряжения

Задачи математической физики для дивергентных уравнений с функциональными коэффициентами имеют большой практический интерес, т. к. описывают различные процессы тепломассопереноса в реальных средах, которые, как правило, являются неоднородными. Известны решения некоторых задач с непрерывными коэффициентами дивергентных уравнений [1–3, с. 193, 271]. В данной статье рассмотрены задачи для дивергентных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами, составленными из квадратичных функций.

Рассмотрим в полосе $D(-l < x < l, y \in R)$, состоящей из двух полос $D_1(-l < x < 0)$ и $D_2(0 < x < l)$ относительно функций $\varphi_i(x, y)$ в D_i первую краевую задачу для дивергентных уравнений

$$\partial_x[K_i(x)\partial_x\varphi_i(x, y)] + K_i(x)\partial_{yy}\varphi_i(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in D_i, \tag{1}$$

[1]С. Е. Холодовский систематизировал материал.
[2]И. А. Ефимова систематизировала материал, провела численные расчёты.

 © Холодовский С. Е., Ефимова И. А., 2020

$$\varphi_{1|x=-l} = 0, \qquad \varphi_{2|x=l} = h(y), \tag{2}$$

$$x = 0: \qquad \varphi_1 = \varphi_2, \qquad k_1\partial_x\varphi_1 = k_2\partial_x\varphi_2; \tag{3}$$

где

$$K_1(x) = k_1(b_1x+1)^2, \qquad K_2(x) = k_2(b_2x+1)^2, \tag{4}$$

k_i, b_i – положительные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$k_1b_1 = k_2b_2, \qquad b_1 < \frac{1}{l}, \tag{5}$$

$h(x)$ – заданная ограниченная при $0 < x < \infty$ функция, $\partial_x = \partial/\partial_x$, функции $\varphi_i(x,y)$ ограничены в D_i.

Задача (1)–(3) описывает установившиеся процессы тепломассопереноса (теплопроводности, фильтрации жидкости, диффузии и др.) в кусочно-неоднородных средах с функциями проницаемости $K_i(x)$ в соответствующей полосе D_i при заданном потенциале на внешней границе полосы D. В задаче (1)–(3) граничное условие однородно при $x = -l$, что не умаляет общности, т. к. при однородном граничном условии при $x = l$ (и неоднородном при $x = -l$) задача решается аналогично, а в общем случае решение задачи имеет вид суммы решений указанных задач.

Проницаемость в зонах D_i меняется по переменной x и не меняется по переменной y. Во всей полосе D функция проницаемости при $k_1 \neq k_2$ на линии $x = 0$ имеет разрыв (скачок) и возрастает по аргументу x в обеих зонах D_i. Отметим, что за счёт неравенства (5) точки, в которых функции проницаемости (4) равны нулю, лежат вне соответствующей зоны D_i. На линии $x = 0$ проницаемости слева и справа соответственно равны k_1 и k_2, при этом постоянные $k_i > 0$ можно задавать произвольно, тогда одна из постоянных b_i определяется из равенства (5).

Условия сопряжения (3) выражают непрерывность потенциала и нормальной скорости на линии разрыва проницаемости.

В задаче (1)–(3) перейдём к новым неизвестным функциям $u_i(x,y)$ в зонах D_i по формулам [3, с. 220]

$$\varphi_1(x,y) = \frac{u_1(x,y)}{b_1x+1}, \qquad \varphi_2(x,y) = \frac{u_2(x,y)}{b_2x+1}. \tag{6}$$

Отсюда уравнения (1) для функций $u_i(x,y)$ примут вид уравнения Лапласа:

$$\Delta u_i(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in D_i, \tag{7}$$

где $\Delta u = \partial_{xx}u + \partial_{yy}u$. Граничные условия (2) примут вид

$$u_{1|x=-l} = 0, \qquad u_{2|x=l} = H(y), \tag{8}$$

где

$$H(y) = \frac{h(y)}{b_2l+1}. \tag{9}$$

Условия сопряжения (3) для функций $u_i(x, y)$ (6) с учётом равенства (5) примут вид условий сопряжения для однородных сред:

$$x = 0: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1 \partial_x u_1 = k_2 \partial_x u_2. \tag{10}$$

Отсюда для функций $u_i(x, y)$ задача имеет вид (7), (8), (10).

Наряду с задачей (7), (8), (10) рассмотрим классическую задачу Дирихле для уравнения Лапласа относительно функции $F(x, y)$ в однородной полосе $-l < x < < l$, $y \in R$:

$$\Delta F = 0, \qquad F_{|x=-l} = 0, \qquad F_{|x=l} = H(y). \tag{11}$$

Решение задачи (11) строится посредством конформного отображения $\zeta = e^{-ic(z-l)}$ полосы $D(-l < x < l)$ плоскости $z = x + iy$ на полуплоскость $\eta > 0$ плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ и решения полученной задачи Дирихле на полуплоскости $\eta > 0$ по формуле Пуассона. Отсюда функцию $F(x, y)$ (11) найдём в виде

$$F(x, y) = -\frac{\sin c(x-l)}{2l} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{H(t)dt}{\operatorname{ch} c(y-t) + \cos c(x-l)}, \qquad c = \frac{\pi}{2l}. \tag{12}$$

Для широкого класса граничных функций $H(y)$ (9) (например, для кусочно-непрерывных функций $H(y)$, составленных из многочленов от e^{cy}) функция $F(x, y)$ (12) строится в конечном виде в элементарных функциях. Поэтому $F(x, y)$ будем считать известной функцией. Тогда решение задачи (7), (8), (10) выражается через функцию $F(x, y)$ в конечном виде:

$$u_1(x, y) = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} F(x, y), \qquad -l < x < 0; \tag{13}$$

$$u_2(x, y) = F(x, y) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} F(-x, y), \qquad 0 < x < l. \tag{14}$$

Формулы (13), (14) следуют из формул для потенциалов в кусочно-однородных средах, разделенных пленкой $x = 0$, в частном случае при отсутствии пленки [4] (т. е. при идеальном контакте двух сред). Отсюда решение исходной задачи (1)–(3) в кусочно-неоднородной полосе D строится по формулам (6), (12)–(14):

$$\varphi_1(x, y) = \frac{2k_2}{(k_1 + k_2)(b_1 x + 1)} F(x, y), \qquad -l < x < 0, \tag{15}$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{1}{b_2 x + 1} \left[F(x, y) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} F(-x, y) \right], \qquad 0 < x < l, \tag{16}$$

где функция $F(x, y)$ имеет вид (12).

Рассмотрим предельный случай, когда $b_1 = 1/l$. Отсюда функция проницаемости $K_1(x)$ (4) примет вид

$$K_1(x) = \frac{k_1}{l^2}(x + l)^2.$$

В данном случае проницаемость в зоне $D_1(-l < x < 0)$ возрастает от нуля при $x = -l$ до k_1 при $x = 0$. Для потенциала $\varphi_1(x, y)$ на линии нулевой проницаемости $x = -l$ должно выполняться условие неперетекания, т. е. линия $x = -l$ является непроницаемой стенкой, на которой нормальная скорость должна равняться нулю. Отсюда при $x \to -l$ должно выполняться условие $K_1 \partial_x \varphi_1 \to 0$. Тогда для функции $u_1(x, y)$ (6) с учётом

$$\varphi_1 = \frac{lu_1}{x + l}, \qquad K_1 \partial_x \varphi_1 = \frac{k_1}{l}[(x + l)\partial_x u_1 - u_1]$$

получим прежнее граничное условие (8): $u_{1|x=-l} = 0$, т. е. в данном случае для функций $u_i(x, y)$ задача имеет вид (7), (8), (10), решение которой строится по формулам (13), (14). При этом решение исходной задачи (1)–(3) выражается равенствами (15), (16).

В качестве примера рассмотрим задачу (1)–(3) для кусочно-постоянной граничной функции:

$$h(y) = \begin{cases} p, & y \in (\alpha, \beta), \\ 0, & y \notin (\alpha, \beta), \end{cases} \tag{17}$$

где p – произвольная постоянная. Отметим, что суммой кусочно-постоянных функций типа (17) можно аппроксимировать с любой заданной точностью произвольную кусочно-непрерывную граничную функцию $h(y)$. Отсюда функция $H(y)$ (9) примет вид

$$H(y) = \begin{cases} p/(b_2 l + 1), & y \in (\alpha, \beta), \\ 0, & y \notin (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Вычисляя интеграл (12), найдём функцию $F(x, y)$ в конечном виде

$$F(x, y) = \frac{2p}{(b_2 l + 1)\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{e^{c(\alpha - y)} - \cos c(x - l)}{\sin c(x - l)} - \operatorname{arctg}\frac{e^{c(\beta - y)} - \cos c(x - l)}{\sin c(x - l)}\right], \tag{18}$$

где $c = \pi/(2l)$. Отсюда решение исходной задачи (1)–(3) в кусочно-неоднородной полосе строится в конечном виде в элементарных функциях по формулам (15), (16), где функция $F(x, y)$ имеет вид (18).

Список литературы

1. Домбровский Г. А. О некоторых системах уравнений с частными производными первого порядка и соответствующих обобщенных уравнениях Эйлера – Пуассона – Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 121–124.

2. Черняев А. П. Построение основных решений обобщенной системы Коши-Римана первого порядка с коэффициентом, зависящим от одной переменной по гипертангенсальному закону // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 11. С. 2071–2083.

3. Положий Г. И. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1965. 442 с.

4. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1204–1208.

Статья поступила в редакцию 20.03.2020; принята к публикации 18.04.2020

Библиографическое описание статьи

Холодовский С. Е., Ефимова Е. А. Задача Дирихле в полосе для дивергентных уравнений с монотонными разрывными коэффициентами. Случаи решений в конечном виде // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2020. Т. 15, № 3. С. 46–51. DOI: 10.21209/2658-7114-2020-15-3-46-51.

Svyatoslav Ye. Kholodovskii[1]**,**
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, 672039, Russia),
e-mail: hol47@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-3983-1384

Irina A. Efimova[2]**,**
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Transbaikal Institute of Entrepreneurship
(16 Leningradskaya st., Chita, 672086, Russia),
e-mail: yefimova79@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-7661-0233

Dirichlet Problem in a Strip for Divergent Equations with Monotone Discontinuous Coefficients. Cases of the Solution to the Problem in the Final Form

The first boundary-value problem is considered in a strip $-l < x < l$, $y \in R$ consisting of two inhomogeneous zones $D_1(-l < x < 0)$ and $D_2(0 < x < l)$ in which the divergence equation has coefficients of the form $K_1(x) = k_1(b_1x + 1)^2$ and $K_2(x) = k_2(b_2x + 1)^2$, respectively, where the constants k_i, b_i satisfy the condition $k_1b_1 = k_2b_2$. The solution to the problem is expressed in its final form through the solution of the classical Dirichlet problem in the strip for the Laplace equation.

Keywords: boundary value problems in a strip, divergence equation, piecewise-continuous permeability functions, conjugation conditions

[1]S. Ye. Kholodovskii systematized material.
[2]I. A. Efimova systematized the material, carried out numerical calculations.

Translit

1. Dombrovskij, G. A. O nekotoryh sistemah uravnenij s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka i sootvetstvuyushchih obobshchennyh uravneniyah Ejlera-Puassona-Darbu // Differencial'nye uravneniya. 1978. T. 14. № 1. S. 121–124.

2. CHernyaev, A. P. Postroenie osnovnyh reshenij obobshchennoj sistemy Koshi-Rimana pervogo poryadka s koefficientom, zavisyashchim ot odnoj peremennoj po gipertangensal'nomu zakonu // Differencial'nye uravneniya. 1981. T. 17. № 11. S. 2071–2083.

3. Polozhij, G. I. Obobshchenie teorii analiticheskih funkcij kompleksnogo peremennogo. Kiev: Izd-vo Kievskogo un-ta, 1965. 442 c.

4. Holodovskij, S. E. Metod svertyvaniya razlozhenij Fur'e. Sluchaj treshchiny (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // Differencial'nye uravneniya. 2009. T. 45. № 8. S. 1204–1208.

Received: March 20, 2020; accepted for publication April 18, 2020

Reference to article

Kholodovskii S. Ye., Efimova I. A. On the Solution of the Dirichlet Problem in the Half-Plane for Divergent Equations with Piecewise Smooth Coefficients. Cases of the Solution to the Problem in the Final Form // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2020. Vol. 15, No 3. PP. 46–51. DOI: 10.21209/2658-7114-2020-15-3-46-51.